Serie 9

1. Total beschränkte Mengen in vollständigen metrischen Räumen

Sei (E, d) ein vollständiger metrischer Raum und $A \subset E$. Zeigen Sie dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a. Die Menge A ist *total beschränkt*, d.h., sie kann, für jedes $\epsilon > 0$, von endlich vielen Bällen mit Radius ϵ überdeckt werden.

b. A ist *präkompakt*, d.h., $\overline{A}$ ist kompakt.

Achtung: In der Vorlesung wurden total beschränkte Mengen präkompakt genannt, wir reservieren aber ab sofort den Begriff *präkompakt* für Mengen mit kompaktem Abschluss.

2. Arzelà-Ascoli: Kompaktheit in Räumen von stetigen Funktionen

Wenn $(E, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum ist, dann heisst eine Familie $\mathcal{F} \subset C(E, \mathbb{C})$

- *gleichgradig stetig*, wenn es für alle $x \in E$ und jedes $\epsilon > 0$ eine offene Umgebung U von x gibt so dass

$$\forall f \in \mathcal{F}\ \forall y \in U : \quad |f(y) - f(x)| < \epsilon.$$

- *punktweise beschränkt*, wenn für jedes $x \in E$, $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\} \subset \mathbb{C}$ beschränkt ist.

Zeigen Sie folgende Version des *Satzes von Arzelà-Ascoli*:

> Wenn $(E, \mathcal{T})$ ein kompakter Hausdorffraum und $\mathcal{F} \subset C(E, \mathbb{C})$ gleichgradig stetig sowie punktweise beschränkt ist, dann ist der Abschluss von $\mathcal{F}$ in $(C(E, \mathbb{C}), d_{\text{glm}})$ kompakt.

Vorschlag einer Beweisstrategie: Sei $(E, \mathcal{T})$ ein kompakter Hausdorffraum und $\mathcal{F} \subset C(E, \mathbb{C})$ gleichgradig stetig sowie punktweise beschränkt. Für gegebenes $\epsilon > 0$, zeigen Sie:

1) Es existieren offene Mengen $U_1, \ldots, U_n \subset E$ mit $E = \bigcup_{i=1}^n U_i$, und Punkte $x_i \in U_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ so dass für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\forall f \in \mathcal{F}\ \forall y \in U_j : \quad |f(y) - f(x_j)| < \frac{1}{4}\epsilon$$

2) Es gibt eine endliche Menge $\{z_1, \ldots, z_m\} \subset \mathbb{C}$ welche in $\{f(x_j) : f \in \mathcal{F},\ 1 \leq j \leq n\}$ $\frac{1}{4}\epsilon$-dicht ist (d.h., "jedes $f(x_j)$ hat Distanz kleiner als $\frac{1}{4}\epsilon$ zu einem z_k"). Mit $A := \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $B := \{z_1, \ldots, z_m\}$ gilt

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\phi \in B^A} \mathcal{F}_\phi, \text{ wobei } \quad \mathcal{F}_\phi := \{f \in \mathcal{F} : |f(x_j) - \phi(x_j)| < \frac{1}{4}\epsilon \text{ für } 1 \leq j \leq n\}.$$

3) $\operatorname{diam}(\mathcal{F}_\phi) \leq \epsilon$ für alle $\phi \in B^A$.

(Hier bezeichnet $\operatorname{diam}(X) := \sup\{d_{\mathrm{glm}}(f,g) : f, g \in X\}$ den Durchmesser einer Menge $X \subset C(E, \mathbb{C})$ bezüglich der gleichförmigen Metrik d_{glm}.)

Folgern Sie dass $\mathcal{F}$ total beschränkt in $(C(E, \mathbb{C}), d_{\mathrm{glm}})$ ist. Vollenden Sie nun den Beweis des obigen Satzes von Arzelà-Ascoli.

3. Tychonoff und das Produkt von nichtleeren Mengen

Ziel dieser Aufgabe ist es, zu beweisen, dass der Satz von Tychonoff impliziert, dass das Produkt von nichtleeren Mengen nicht leer ist.

Sei $\mathcal{A}$ eine Familie von nichtleeren Mengen. Wir wollen zeigen, dass

$$P = \prod_{A \in \mathcal{A}} A$$

nicht leer ist. Sei ∞ ein Punkt welcher in keinem $A \in \mathcal{A}$ enthalten ist. Für $A \in \mathcal{A}$ bezeichnen wir mit A^* die Menge $A \cup \{\infty\}$. Wir versehen A^* mit der Topologie

$$\mathcal{T}_{A^*} = \{\emptyset, A, \{\infty\}, A^*\}.$$

Damit ist $(A^*, \mathcal{T}_{A^*})$ ein topologischer Raum. Wir definieren

$$P^* := \prod_{A \in \mathcal{A}} A^*,$$

wobei wir P^* mit der Produkttopologie versehen. Weiter bezeichnen wir mit

$$\pi_A : P^* \longrightarrow A^*$$

die Projektion auf die A-te Komponente. Im folgenden fassen wir P als Teilraum von P^* auf.

a) Prüfen Sie mit Hilfe des Satzes von Tychonoff, dass P^* kompakt ist.

b) Zeigen Sie, dass

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \pi_A^{-1}(A) = P.$$

c) Beweisen Sie, dass P nichtleer ist.

Hinweis: Verwende die Charakterisierung von Kompaktheit durch abgeschlossene Mengen aus der Vorlesung.

4. Produkttopologie und Abschluss

Es sei $\{(E_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ eine Familie von topologischen Räumen. Wenn $B_\alpha \subset E_\alpha$ $(\alpha \in A)$, dann gilt

$$\overline{\prod_{\alpha \in A} B_\alpha} = \prod_{\alpha \in A} \overline{B_\alpha}.$$

5. Produkt von Hausdorffräumen

Beweisen Sie, dass das Produkt von Hausdorffräumen Hausdorff ist.